數學傳播 48卷2期, pp. 77-94

# 反演變換前後的方程結構

王宣惠 · 涂嘉芸 · 蕭羽涵

**摘要**: $y=f(x)$ 對 $x^2+y^2=1$ 進行反演變換, 反演點參數式表示爲

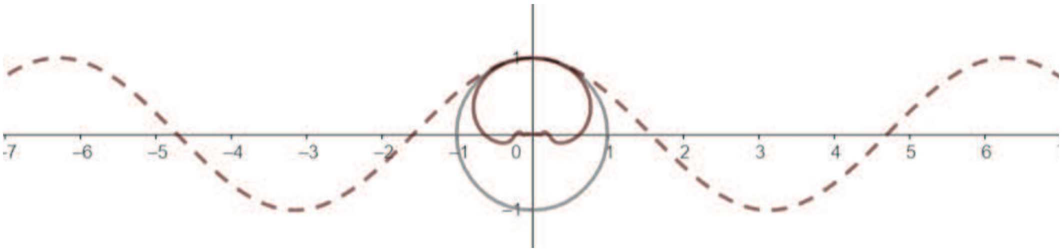
$$(t,f(t))\to(x'(t),y'(t))=\Big(\frac{t}{t^2+f^2(t)},\frac{f(t)}{t^2+f^2(t)}\Big)$$

我們很好奇反演前後圖形之間有何差異、是否存在特定關係, 同時反演後圖形如要符合特定性質, 則反演前圖形需要存在什麼條件。有了這樣的歸納, 我們設定反演前的條件就能夠得到反演後的性質。

## 本文

### 一、

透過 Geogebra 繪圖觀察, 反演點的軌跡不一定爲函數圖形, 下圖爲一個例子。不見得能用來表示反演點的軌跡, 故我們透過參數式來討論點的軌跡。




(虛線爲 $y=f(x)=\cos x$, 圓內實線爲反演後的軌跡圖形。)

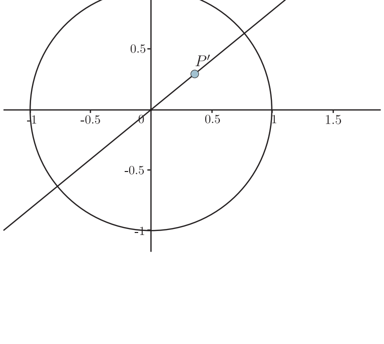
$y=f(x)$ 對 $x^2+y^2=1$ 進行反演變換, 原函數動點參數式爲 $P(t,f(t))$, 我們求出反演點 $P'(x'(t),y'(t))$ 如下:

$\overleftrightarrow{PP'}$ 的斜率爲 $\dfrac{f(t)}{t}$, 則 $\overleftrightarrow{PP'}: y=\dfrac{f(t)}{t}x$, 令 $P'\Big(k,\dfrac{f(t)}{t}k\Big)$,

依定義 $\dfrac{\overline{OP'}}{1}=\dfrac{1}{\overline{OP}}\Rightarrow \overline{OP'}\cdot\overline{OP}=1$

$\Rightarrow\ \sqrt{k^2+\Big(\dfrac{f(t)}{t}k\Big)^2}\times\sqrt{t^2+f^2(t)}=1$

$\Rightarrow\ k=\dfrac{t}{t^2+f^2(t)}$, 得 $P'\Big(\dfrac{t}{t^2+f^2(t)},\dfrac{f(t)}{t^2+f^2(t)}\Big)$.



爲了掌握反演點的軌跡, 我們將各項性質進行討論。

**性質** 1.1:

(1) 若 $g(x,y)=0$ 爲垂直線 $x=k$, $k\neq 0$, 則 $y=f(x)=\pm\sqrt{\dfrac{x-kx^2}{k}}$。

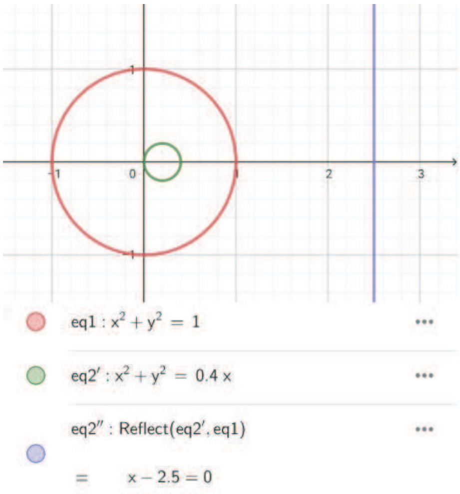
(2) 若 $g(x,y)=0$ 爲水平線 $y=h$, $h\neq 0$, 則 $y=f(x)=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4h^2x^2}}{2h}$。

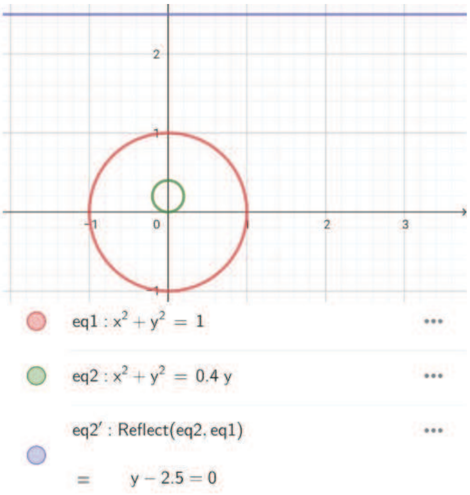
**證明**:

(1) $\dfrac{t}{t^2+f^2(t)}=k$, $t=kt^2+kf^2(t)$, $f(t)=\pm\sqrt{\dfrac{t-kt^2}{k}}$。

(2) $y=f(t)=h$, $h=\dfrac{f(t)}{t^2+f^2(t)}$, 令 $f(t)=A$, 得 $hA^2-A+ht^2=0\Rightarrow f(x)=A=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4h^2t^2}}{2h}$。 □

性質 1.1 的圖形舉例如下:




**性質** 1.2: $g(x,y)=0$ 不通過 $(0,0)$。

**證明**: 根據定義 $\overline{OP'}\times\overline{OP}=1$, 則 $P'$ 不爲 $(0,0)$。 □

**性質** 1.3: $y=f(x)$ 在 $P$ 點連續, 則 $g(x,y)$ 在 $P'$ 點連續。

**證明**: 令 $P(a,f(a))$, 則 $\lim\limits_{t\to a}f(t)=f(a)$。

$$\lim_{t\to a}x'(t)=\lim_{t\to a}\frac{t}{t^2+f^2(t)}=\frac{a}{a^2+f^2(a)}=x'(a),$$
$$\lim_{t\to a}y'(t)=\lim_{t\to a}\frac{f(t)}{t^2+f^2(t)}=\frac{f(a)}{a^2+f^2(a)}=y'(a).$$

$\therefore\ \lim\limits_{t\to a}(x'(t),y'(t))=(x'(a),y'(a))$, 即 $g(x,y)=0$ 在 $P'$ 點連續。 □

**性質** 1.4: $\lim\limits_{t\to\infty}(x'(t),y'(t))=(0,0)$, 亦即當 $t\to\infty$ 時, 則反演點趨近於原點。

**證明**:

$$\lim_{t\to\infty}|x'(t)|=\lim_{t\to\infty}\left|\frac{t}{t^2+f^2(t)}\right|\leq\lim_{t\to\infty}\left|\frac{t}{t^2}\right|=\lim_{t\to\infty}\left|\frac{1}{t}\right|=0,\quad\therefore\ \lim_{t\to\infty}x'(t)=0,$$

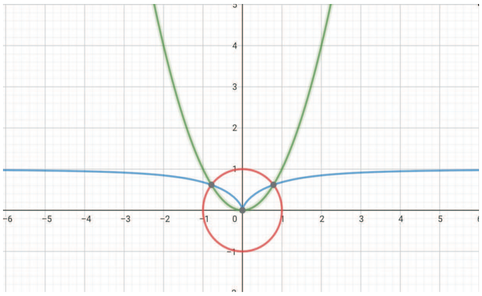
$$\lim_{t\to\infty}|y'(t)|=\lim_{t\to\infty}\left|\frac{f(t)}{t^2+f^2(t)}\right|=\lim_{t\to\infty}\frac{|f(t)|}{\sqrt{t^2+f^2(t)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t^2+f^2(t)}}$$

$$\leq\lim_{t\to\infty}\frac{|f(t)|}{\sqrt{f^2(t)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{|f(t)|}{|f(t)|}\cdot\frac{1}{|t|}=1\cdot\lim_{t\to\infty}\frac{1}{|t|}=0.$$

$\therefore\ \lim\limits_{t\to\infty}y'(t)=0$, 故 $\lim\limits_{t\to\infty}(x'(t),y'(t))=(0,0)$。 □

**性質** 1.5: $\lim\limits_{t\to0}x'(t)\to\infty$, $\lim\limits_{t\to0}x'(t)=0$, $\lim\limits_{t\to0}x'(t)$ 爲實數, 找出 $y=f(x)$ 符合前述三種性質的條件。

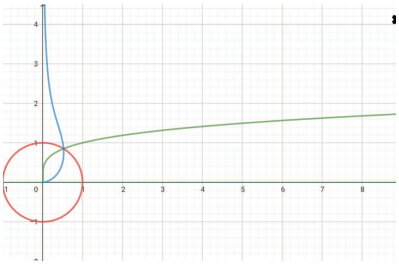
**解**: $\lim\limits_{t\to0}x'(t)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{t^2+f^2(t)}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{t+\dfrac{f^2(t)}{t}}$.



(1) 當 $\lim\limits_{t\to0}\left(t+\dfrac{f^2(t)}{t}\right)=0\Rightarrow\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f^2(t)}{t}=0$,

則 $\lim\limits_{t\to0}x'(t)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{t+\dfrac{f^2(t)}{t}}\to\infty$。

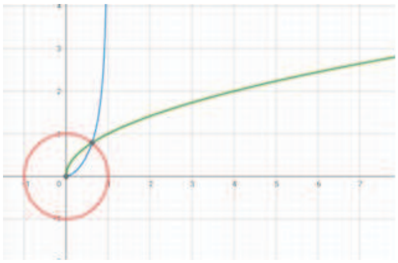
例如: $f(t)=t^2$。



(2) 當 $\lim\limits_{t\to0}\left(t+\dfrac{f^2(t)}{t}\right)\to\infty\Rightarrow\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f^2(t)}{t}\to\infty$,

則 $\lim\limits_{t\to0}x'(t)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{t+\dfrac{f^2(t)}{t}}=0$。

例如: $f(t)=t^{\frac{1}{4}}$。



(3) 當 $\lim\limits_{t\to0}\left(t+\dfrac{f^2(t)}{t}\right)=k,k\neq0\Rightarrow\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f^2(t)}{t}=k$,

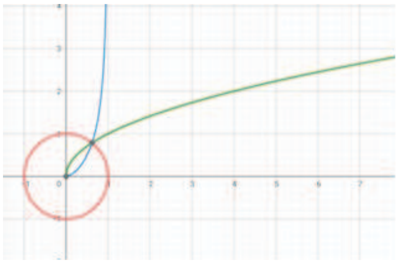
則 $\lim\limits_{t\to0}x'(t)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1}{t+\dfrac{f^2(t)}{t}}=\dfrac{1}{k}$。

例如: $f(t)=t^{\frac{1}{2}}$。

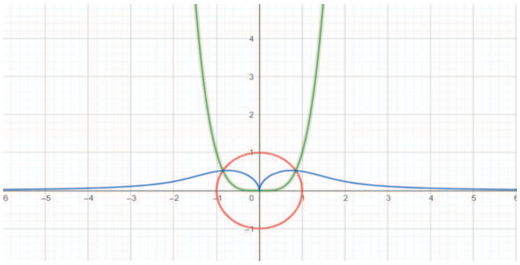
**性質** 1.6: $\lim\limits_{t\to0}y'(t)\to\infty$, $\lim\limits_{t\to0}y'(t)=0$, $\lim\limits_{t\to0}y'(t)$ 爲實數, 找出 $y=f(x)$ 符合前述三種性質的條件。

**解**: 若 $y=f(t)=0$, 則 $\lim\limits_{t\to 0} y'(t)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t^2+f^2(t)}=0$, 即$x$軸上的點, 其反演點也在$x$軸上。

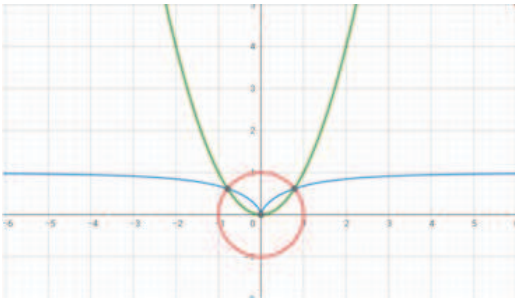
若 $y=f(t)\neq 0$, 則 $\lim\limits_{t\to 0} y'(t)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t^2+f^2(t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\frac{t^2}{f(t)}+f(t)}$, (PS: $\dfrac{t^2}{f(t)}$ 及 $f(t)$ 同號。)



(1) 當 $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{t^2}{f(t)}+f(t)\right)=0\Rightarrow\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2}{f(t)}=0$,
且 $\lim\limits_{t\to 0} f(t)=0$ 時, $\lim\limits_{t\to 0} y'(t)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\frac{t^2}{f(t)}+f(t)}$
$\to\infty$。例如: $f(t)=t^{\frac{1}{2}}$。



(2) 當 $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{t^2}{f(t)}+f(t)\right)\to\infty$
$\Rightarrow\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2}{f(t)}\to\infty$ 或 $\lim\limits_{t\to 0} f(t)\to\infty$,
$\lim\limits_{t\to 0} y'(t)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\frac{t^2}{f(t)}+f(t)}=0$。
例如: $f(t)=t^4$。



(3) 當 $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{t^2}{f(t)}+f(t)\right)=h,\ h\neq 0$
$\Rightarrow\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2}{f(t)}=h$ 或 $\lim\limits_{t\to 0} f(t)=h$,
$\lim\limits_{t\to 0} y'(t)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\frac{t^2}{f(t)}+f(t)}=\dfrac{1}{h}$。
例如: $f(t)=t^2$。

將性質 1.4 到性質 1.6 整理如下, 方便後面討論 $(x'(t),y'(t))$ 的趨勢。

| | $(x'(t),y'(t))$ 趨勢 | 條件 |
|---|---|---|
| 1 | $\lim\limits_{t\to\infty}(x'(t),y'(t))=(0,0)$ | |
| 2 | $\lim\limits_{t\to 0} x'(t)\to\infty$ | 當 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f^2(t)}{t}=0$ 時 |
| 3 | $\lim\limits_{t\to 0} x'(t)=0$ | 當 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f^2(t)}{t}\to\infty$ 時 |

| | | |
|---|---|---|
| 4 | $\lim_{t\to 0} x'(t) = \dfrac{1}{k}$ | 當 $\lim_{t\to 0} \dfrac{f^2(t)}{t} = k,\ k \neq 0$ 時 |
| 5 | $\lim_{t\to 0} y'(t) \to \infty$ | 當 $\lim_{t\to 0} \dfrac{t^2}{f(t)} = 0$ 且 $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$ 時 |
| 6 | $\lim_{t\to 0} y'(t) = 0$ | 當 $\lim_{t\to 0} \dfrac{t^2}{f(t)} \to \infty$ 或 $\lim_{t\to 0} f(t) \to \infty$ 時 |
| 7 | $\lim_{t\to 0} y'(t) = \dfrac{1}{h}$ | 當 $\lim_{t\to 0} \dfrac{t^2}{f(t)} = h$ 或 $\lim_{t\to 0} f(t) = h,\ h \neq 0$ 時 |

前兩個性質我們討論了反演點的橫座標、縱座標會趨近於 $\infty$, 0, 定值, 但更仔細觀察會發現有的反演圖形會有漸近線, 故我們接著討論反演圖形是否存在漸近線。 □

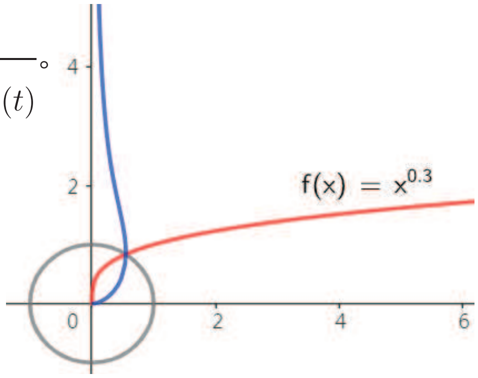
**性質** 1.7:

$x = 0$ 或 $x = k > 0$ 爲 $g(x, y) = 0$ 的漸近線, 找出 $y = f(x)$ 符合前述兩種性質的條件。

$y = 0$ 或 $y = h > 0$ 爲 $g(x, y) = 0$ 的漸近線, 找出 $y = f(x)$ 符合前述兩種性質的條件。

**解**: 已知 $\lim_{t\to 0} x'(t) = \lim_{t\to 0} \dfrac{t}{t^2 + f^2(t)} = \lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t + \dfrac{f^2(t)}{t}}$

及 $\lim_{t\to 0} y'(t) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(t)}{t^2 + f^2(t)} = \lim_{t\to 0} \dfrac{1}{\dfrac{t^2}{f(t)} + f(t)}$。




(1) 當 $\lim_{t\to 0} x'(t) = 0$ 且 $\lim_{t\to 0} y'(t) \to \infty$,

則 $x = 0$ 爲 $g(x, y) = 0$ 的漸近線。

由性質 1.5 及性質 1.6 可知須符合

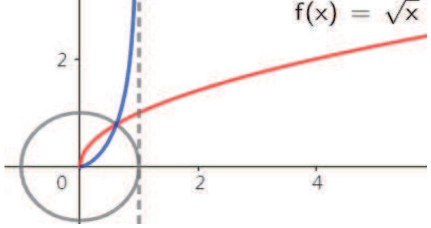
$$\begin{cases} \lim_{t\to 0} \dfrac{f^2(t)}{t} \to \infty, \\ \lim_{t\to 0} \dfrac{t^2}{f(t)} = 0 \text{ 且 } \lim_{t\to 0} f(t) = 0. \end{cases}$$

(2) 當 $\lim_{t\to 0} x'(t) = k$ 且 $\lim_{t\to 0} y'(t) \to \infty$,

則 $x = k$ 爲 $g(x, y) = 0$ 的漸近線。

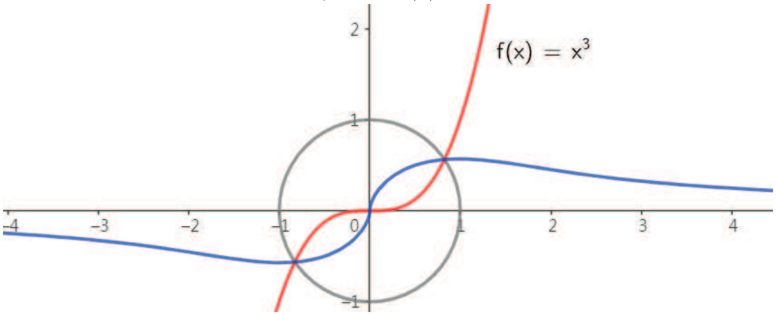
由性質 1.5 及性質 1.6 可知須符合

$$\begin{cases} \lim_{t\to 0} \dfrac{f^2(t)}{t} = \dfrac{1}{k}, \\ \lim_{t\to 0} \dfrac{t^2}{f(t)} = 0 \text{ 且 } \lim_{t\to 0} f(t) = 0. \end{cases}$$



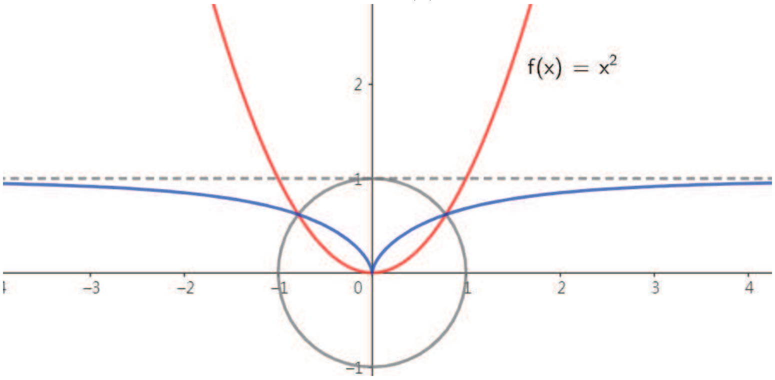
(3) 當 $\lim\limits_{t\to 0} x'(t)\to\infty$ 且 $\lim\limits_{t\to 0} y'(t)=0$, 則 $y=0$ 爲 $g(x,y)=0$ 的漸近線。

由性質 1.5 及性質 1.6 可知須符合 $\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f^2(t)}{t} = 0, \\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^2}{f(t)} \to\infty \text{ 或 } \lim\limits_{t\to 0} f(t)\to\infty. \end{cases}$




(4) 當 $\lim\limits_{t\to 0} x'(t)\to\infty$ 且 $\lim\limits_{t\to 0} y'(t)=h$, 則 $y=h$ 爲 $g(x,y)=0$ 的漸近線。

由性質 1.5 及性質 1.6 可知須符合 $\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f^2(t)}{t} = 0, \\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^2}{f(t)} = \dfrac{1}{h} \text{ 或 } \lim\limits_{t\to 0} f(t)=\dfrac{1}{h}. \end{cases}$




**性質** 1.8: $y=ax+b, a\neq 0$ 爲 $g(x,y)=0$ 的漸近線, 找出 $y=f(x)$ 符合前述兩種性質的條件。

**解**: 已知 $\lim\limits_{t\to 0} x'(t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{t^2+f^2(t)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t+\dfrac{f^2(t)}{t}}$ 及

$\lim\limits_{t\to 0} y'(t)=\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t)}{t^2+f^2(t)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{\dfrac{t^2}{f(t)}+f(t)}$。$y=ax+b$ 爲 $g(x,y)=0$ 的漸近線的條件爲

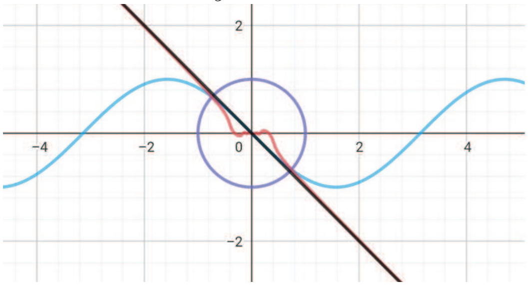
(1) $\lim\limits_{t\to 0} x'(t) \to \infty \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f^2(t)}{t} = 0.$

(2) $\lim\limits_{t\to 0} y'(t)\to\infty \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2}{f(t)}=0$ 且 $\lim\limits_{t\to 0} f(t)=0.$

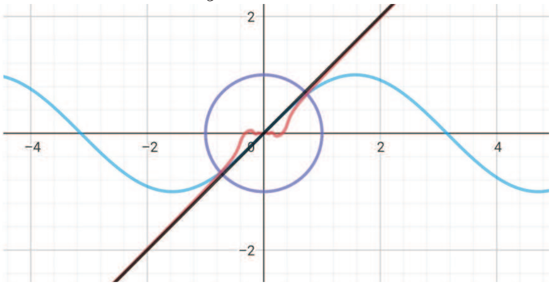
(3) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{y'(t)-b}{x'(t)-0}=a \Rightarrow \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\dfrac{f(t)}{t^2+f^2(t)}-b}{\dfrac{t}{t^2+f^2(t)}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)-b(t^2+f^2(t))}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)-bf^2(t)}{t}=$

$a$, 由 (1)(2)(3) 得 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f^2(t)}{t}=0$, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2}{f(t)}=0$, $\lim\limits_{t\to 0} f(t)=0$ 以及 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)-bf^2(t)}{t}=a$。

$y=\sin t$




$y=-\sin t$

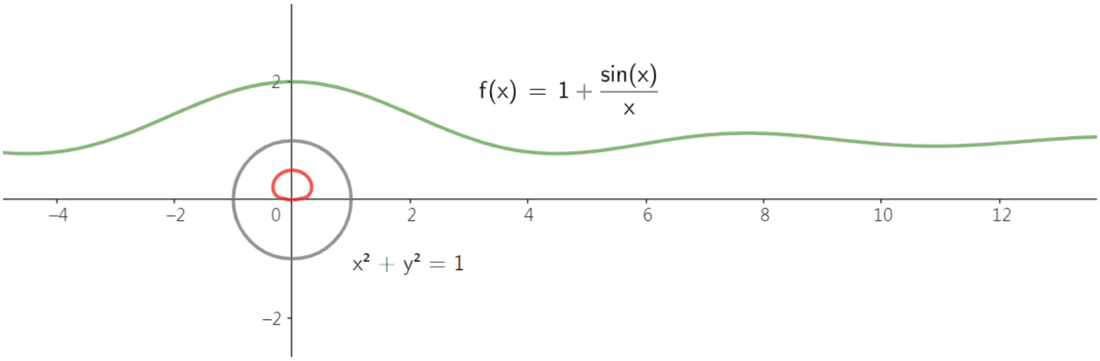



**性質** 1.9: $y=f(x)$ 圖形不通過原點, 則 $g(x,y)=0$ 圖形爲有界圖形, 反之亦然。

**證明**: 已知 $y=f(x)$ 反演點之座標爲 $\left(\dfrac{t}{t^2+f^2(t)},\dfrac{f(t)}{t^2+f^2(t)}\right)$。

若原 $y=f(x)$ 圖形過原點 $(0,0)$, 則 $t=0$, $f(t)=0$。

$\therefore\ t^2+f^2(t)=0$, 故 $\left(\dfrac{t}{t^2+f^2(t)},\dfrac{f(t)}{t^2+f^2(t)}\right)$ 無解。 □




二、

反演前的圖形不見得是函數, 我們用 $f(x,y)=0$ 示之, $f(x,y)=0$ 圖形上的點也用參數式 $P(x(t),y(t))$ 表示, 故對 $x^2+y^2=1$ 進行反演變換後 $g(x,y)=0$ 上的反演點 $P'$ 參

數式為

$$(x(t),y(t))\to(x'(t),y'(t))=\Big(\frac{x(t)}{x^2(t)+y^2(t)},\frac{y(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\Big).$$

更進一步如果反演圓不是單位圓, 而是 $x^2+y^2=r^2$, $r>0$ 依定義 $\dfrac{\overline{OP'}}{r}=\dfrac{r}{\overline{OP}}\Rightarrow \overline{OP'}\cdot\overline{OP}=r^2$ 反演點的參數式則修正為

$$(x(t),y(t))\to(x'(t),y'(t))=\Big(\frac{r^2x(t)}{x^2(t)+y^2(t)},\frac{r^2y(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\Big).$$

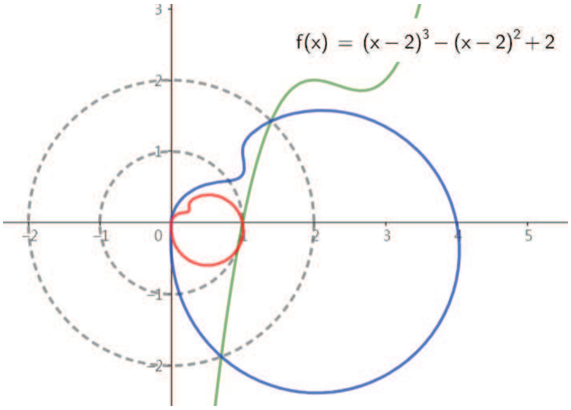
**定義** 2.1: $(x(t),y(t))$ 為 $f(x,y)=0$ 的參數式, 定義 $T_r(x(t),y(t))=\Big(\dfrac{r^2x(t)}{x^2(t)+y^2(t)},\dfrac{r^2y(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\Big)$以$\{T_r(f(x,y)=0)\}=\{g(x,y)=0\}$ 表示 $g(x,y)=0$ 的圖形。

**性質** 2.2: $\{T_s(f(x,y)=0)\}$ 與 $\{T_r(f(x,y)=0)\}$ 相似, 即 $T_s\sim T_r$。

**證明**:

$$T_s(x(t),y(t))=\Big(\frac{s^2x(t)}{x^2(t)+y^2(t)},\frac{s^2y(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\Big),T_r(x(t),y(t))=\Big(\frac{r^2x(t)}{x^2(t)+y^2(t)},\frac{r^2y(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\Big)$$

二者變換之反演點分別為 $P\Big(\dfrac{s^2x(t)}{x^2(t)+y^2(t)},\dfrac{s^2y(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\Big)$ 及 $Q\Big(\dfrac{r^2x(t)}{x^2(t)+y^2(t)},\dfrac{r^2y(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\Big)$, $\overrightarrow{OP}=\dfrac{s^2}{r^2}\overrightarrow{OQ}$, 則其圖形必相似。 □




**性質** 2.3: $T_s\circ T_r(x(t),y(t))\neq T_r\circ T_s(x(t),y(t))$, $s\neq r$。

**證明**:

(1) $$T_s\circ T_r(x(t),y(t))=T_s\Big(\frac{r^2x(t)}{x^2(t)+y^2(t)},\frac{r^2y(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\Big)$$

$$= \left( \frac{\dfrac{r^2 s^2}{x^2(t)+y^2(t)}x(t)}{\left(\dfrac{r^2}{x^2(t)+y^2(t)}x(t)\right)^2+\left(\dfrac{r^2}{x^2(t)+y^2(t)}y(t)\right)^2}, \right.$$

$$\left. \frac{\dfrac{r^2 s^2}{x^2(t)+y^2(t)}y(t)}{\left(\dfrac{r^2}{x^2(t)+y^2(t)}x(t)\right)^2+\left(\dfrac{r^2}{x^2(t)+y^2(t)}y(t)\right)^2} \right) = \left(\left(\frac{s}{r}\right)^2 x(t), \left(\frac{s}{r}\right)^2 y(t)\right).$$

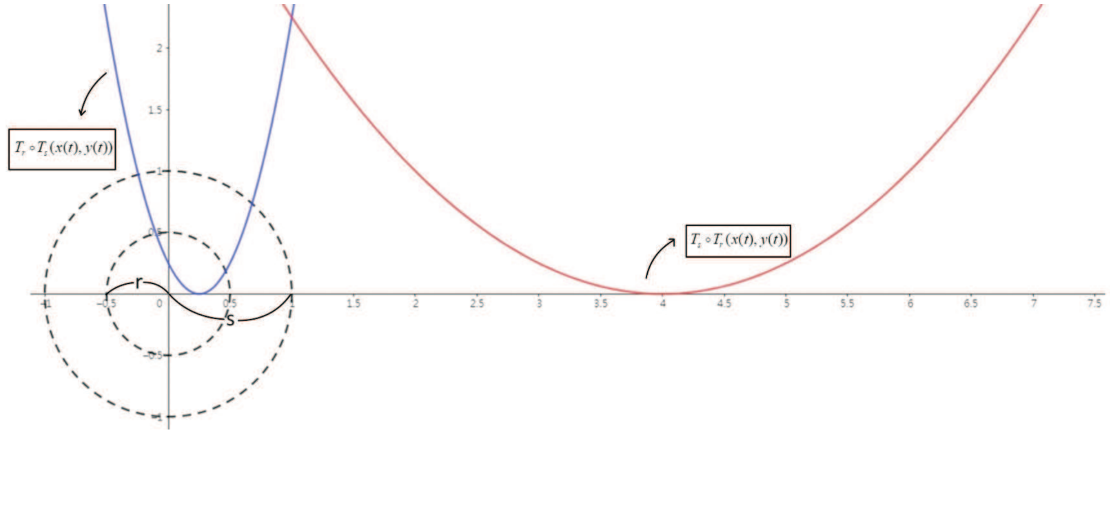
(2) $$T_r \circ T_s(x(t), y(t)) = T_r\left(\frac{s^2 x(t)}{x^2(t)+y^2(t)}, \frac{s^2 y(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\right)$$

$$= \left( \frac{\dfrac{r^2 s^2}{x^2(t)+y^2(t)}x(t)}{\left(\dfrac{s^2}{x^2(t)+y^2(t)}x(t)\right)^2+\left(\dfrac{s^2}{x^2(t)+y^2(t)}y(t)\right)^2}, \right.$$

$$\left. \frac{\dfrac{r^2 s^2}{x^2(t)+y^2(t)}y(t)}{\left(\dfrac{s^2}{x^2(t)+y^2(t)}x(t)\right)^2+\left(\dfrac{s^2}{x^2(t)+y^2(t)}y(t)\right)^2} \right) = \left(\left(\frac{r}{s}\right)^2 x(t), \left(\frac{r}{s}\right)^2 y(t)\right),$$

則 $$\begin{cases} T_s \circ T_r(x(t), y(t)) = \left(\left(\dfrac{s}{r}\right)^2 x(t), \left(\dfrac{s}{r}\right)^2 y(t)\right) \\ T_r \circ T_s(x(t), y(t)) = \left(\left(\dfrac{r}{s}\right)^2 x(t), \left(\dfrac{r}{s}\right)^2 y(t)\right) \end{cases},$$

故 $T_s \circ T_r(x(t), y(t)) \neq T_r \circ T_s(x(t), y(t))$。 □



**性質** 2.4:

(1) $\{T_p \circ T_q(f(x,y)=0)\}$、$\{T_r \circ T_s(f(x,y)=0)\}$ 及 $\{f(x,y)=0\}$ 皆相似, 即 $T_p \circ T_q \sim T_r \circ T_s$。

(2) 若 $\dfrac{p}{q} \times \dfrac{r}{s} = 1$, 則 $(T_p \circ T_q) \circ (T_r \circ T_s) = (T_r \circ T_s) \circ (T_p \circ T_q) = I$。

**證明**:

(1) 令 $\{f(x,y)=0\}$ 的點座標為 $P(x(t),y(t))$ 由性質 2.3 可得 $\{T_p \circ T_q(f(x,y)=0)\}$ 的點座標為 $R\Big(\dfrac{p^2}{q^2}x(t), \dfrac{p^2}{q^2}y(t)\Big)$, 而 $\{T_r \circ T_s(f(x,y)=0)\}$ 的點座標為 $Q\Big(x(t)\dfrac{r^2}{s^2}, y(t)\dfrac{r^2}{s^2}\Big)$.

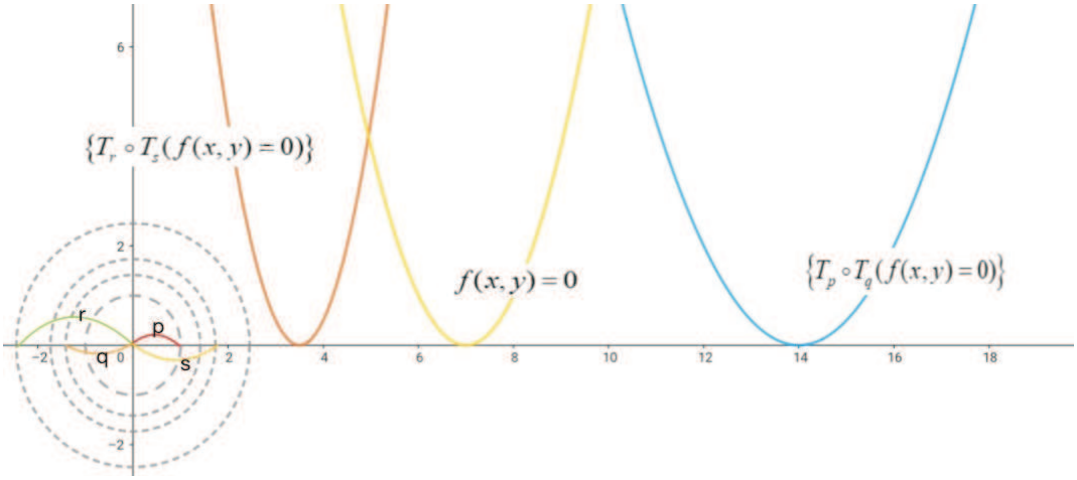
$\because \overline{OP} = \dfrac{q^2}{p^2}\overline{OR} = \dfrac{s^2}{r^2}\overline{OQ}$

$\therefore$ 三者相似, 當一函數圖形經兩次反演變換後, 相當於對原有函數圖形進行伸縮變換。

(2) 由性質 2.3 得

$$
\begin{aligned}
(T_p \circ T_q) \circ (T_r \circ T_s)(x(t),y(t)) &= (T_p \circ T_q)\left(\left(\frac{r}{s}\right)^2 x(t), \left(\frac{r}{s}\right)^2 y(t)\right) \\
&= \left(\left(\frac{p}{q}\right)^2\left(\frac{r}{s}\right)^2 x(t), \left(\frac{p}{q}\right)^2\left(\frac{r}{s}\right)^2 y(t)\right) = (x(t),y(t)).
\end{aligned}
$$

$\therefore (T_p \circ T_q) \circ (T_r \circ T_s) = I$ 同理, $(T_r \circ T_s) \circ (T_p \circ T_q) = I$。 □




**性質** 2.5: $A$、$B$ 為座標上異於原點的相異兩點, $T_r(A) = C$、$T_r(B) = D$, 則

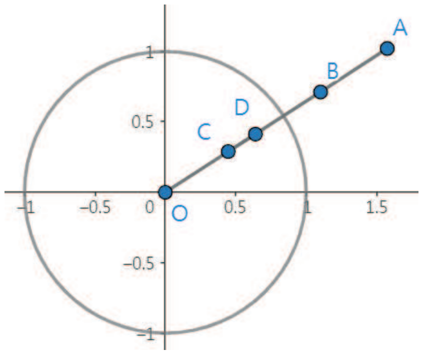
$$\overline{CD} = \frac{r^2\overline{AB}}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}。$$

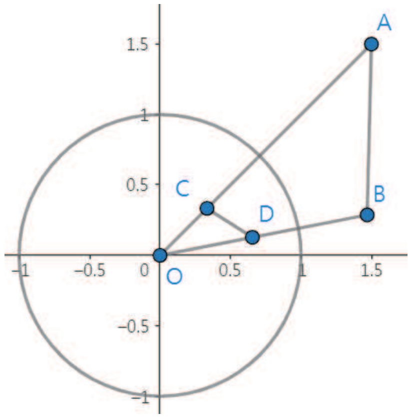
**證明**: 若 $O, A, B$ 共線, 則 $O, A, B, C, D$ 共線,

$$\overline{CD} = |\overline{OD} - \overline{OC}| = \left|\frac{r^2}{\overline{OB}} - \frac{r^2}{\overline{OA}}\right| = \left|\frac{r^2(\overline{OA} - \overline{OB})}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}\right| = \frac{r^2\overline{AB}}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}.$$

若 $O, A, B$ 三點不共線, 則 $\triangle AOB \sim \triangle DOC$, 故

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}\cdot\overline{OC}}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}} = \frac{r^2}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{r^2\overline{AB}}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}.$$ □




**性質** 2.6: $L: y = mx + k$, $k \neq 0$, $T_r(L)$ 爲

$$\left(x + \frac{mr^2}{2k}\right)^2 + \left(y - \frac{r^2}{2k}\right)^2 = \left(\frac{r^2\sqrt{m^2+1}}{2k}\right)^2,$$

但 $(x, y) \neq (0, 0)$。面積爲反演圓的 $\dfrac{r^2(m^2+1)}{4k^2}$ 倍。

**證明**: 若 $Q \in T_r(L)$ 爲 $P \in L$ 的反演點, 同理, $P$ 亦爲 $Q$ 的反演點。令

$$\begin{aligned}
Q(x,y) &\Rightarrow P\Big(\frac{r^2x}{x^2+y^2}, \frac{r^2y}{x^2+y^2}\Big), \text{ 代入 } y = mx + k。\\
&\Rightarrow \frac{r^2y}{x^2+y^2} = m\Big(\frac{r^2x}{x^2+y^2}\Big) + k \Rightarrow kx^2 + mr^2x - r^2y + ky^2 = 0\\
&\Rightarrow x^2 + \frac{mr^2}{k}x + y^2 - \frac{r^2}{k}y = 0\\
&\Rightarrow \left(x^2 + \frac{mr^2}{k}x + \Big(\frac{mr^2}{2k}\Big)^2\right) + \left(y^2 - \frac{r^2}{k}y + \Big(\frac{r^2}{2k}\Big)^2\right) = \Big(\frac{mr^2}{2k}\Big)^2 + \Big(\frac{r^2}{2k}\Big)^2\\
&\Rightarrow \left(x + \frac{mr^2}{2k}\right)^2 + \left(y - \frac{r^2}{2k}\right)^2 = \left(\frac{r^2\sqrt{m^2+1}}{2k}\right)^2.
\end{aligned}$$ □

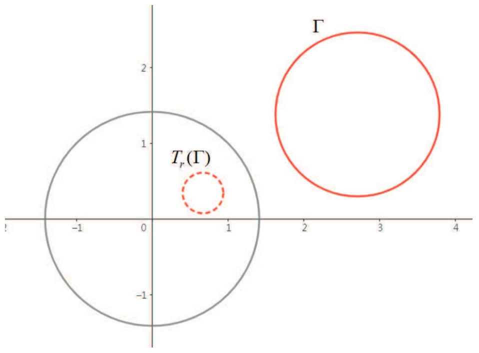
**性質** 2.7: 若 $\Gamma : (x-p)^2+(y-q)^2=s^2$ 不經過原點, $T_r(\Gamma)$ 爲

$$\Big(x-\frac{pr^2}{p^2+q^2-s^2}\Big)^2+\Big(y-\frac{qr^2}{p^2+q^2-s^2}\Big)^2=\Big(\frac{r^2s}{p^2+q^2-s^2}\Big)^2.$$

**證明**: 若 $Q\in T_r(\gamma)$ 爲 $P\in\Gamma$ 的反演點, 同理, $P$ 亦爲 $Q$ 的反演點。令

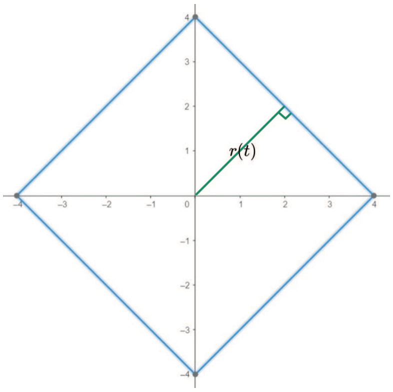
$$\begin{aligned}
Q(x,y) &\Rightarrow P\Big(\frac{r^2x}{x^2+y^2},\frac{r^2y}{x^2+y^2}\Big),\ \text{代入 } (x-p)^2+(y-q)^2=s^2\\
&\Rightarrow \Big(\frac{r^2x}{x^2+y^2}-p\Big)^2+\Big(\frac{r^2y}{x^2+y^2}-q\Big)^2=s^2\\
&\Rightarrow \Big(\frac{px^2+py^2-r^2x}{x^2+y^2}\Big)^2+\Big(\frac{qx^2+qy^2-r^2y}{x^2+y^2}\Big)^2=s^2\\
&\Rightarrow (px^2+py^2-r^2x)^2+(qx^2+qy^2-r^2y)^2=s^2(x^2+y^2)^2\\
&\Rightarrow (p^2x^4+p^2x^2y^2-pr^2x^3+p^2x^2y^2+p^2y^4-pr^2xy^2-pr^2x^3-pr^2xy^2+r^4x^2)\\
&\quad +(q^2x^4+q^2x^2y^2-qr^2x^2y+q^2x^2y^2+q^2y^4-qr^2y^3-qr^2x^2y-qr^2y^3+r^4y^2)\\
&\quad = s^2x^4+2s^2x^2y^2+s^2y^4\\
&\Rightarrow (p^2+q^2-s^2)x^4+2(p^2+q^2-s^2)x^2y^2+(p^2+q^2-s^2)y^4\\
&\quad -2pr^2x^3-2pr^2xy^2-2qr^2x^2y-2qr^2y^3+r^4x^2+r^4y^2=0\\
&\Rightarrow (p^2+q^2-s^2)(x^2+y^2)^2-2pr^2x(x^2+y^2)-2qr^2y(x^2+y^2)+r^4(x^2+y^2)=0\\
&\Rightarrow (x^2+y^2)-\frac{2pr^2x}{p^2+q^2-s^2}-\frac{2qr^2y}{p^2+q^2-s^2}=-\frac{r^4}{p^2+q^2-s^2}\\
&\Rightarrow \left(x^2-\frac{2pr^2x}{p^2+q^2-s^2}+\Big(\frac{pr^2}{p^2+q^2-s^2}\Big)^2\right)+\left(y^2-\frac{2qr^2y}{p^2+q^2-s^2}+\Big(\frac{qr^2}{p^2+q^2-s^2}\Big)^2\right)\\
&\quad =-\frac{r^4}{p^2+q^2-s^2}+\Big(\frac{pr^2}{p^2+q^2-s^2}\Big)^2+\Big(\frac{qr^2}{p^2+q^2-s^2}\Big)^2\\
&\Rightarrow \Big(x^2-\frac{pr^2}{p^2+q^2-s^2}\Big)^2+\Big(y^2-\frac{qr^2}{p^2+q^2-s^2}\Big)^2=\Big(\frac{r^2s}{p^2+q^2-s^2}\Big)^2.
\end{aligned}$$

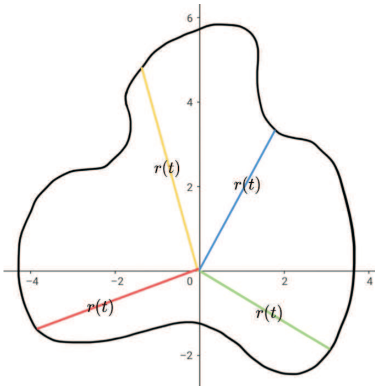
□



三、

前述都是對圓心爲原點的圓進行反演變換, 我們接下來想討論對封閉圖形的變換, 這個封閉圖形 $\Omega$ 畫圖說明如下, 同時我們稱這個區域爲*封閉反演區域*:



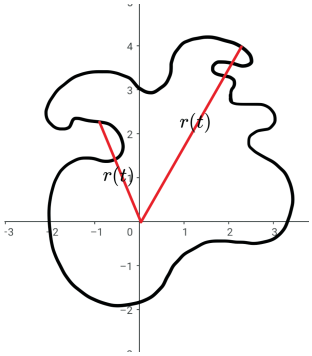



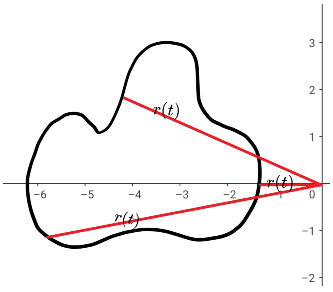

$f(x,y)=0$ 故對 $\Omega$ 進行反演變換後 $g(x,y)=0$ 上的反演點, 參數式爲

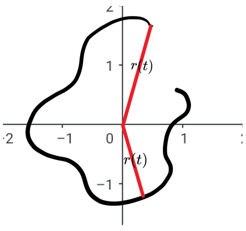
$$(x(t),y(t))\to(x'(t),y'(t))=\Big(\frac{r^2(t)x(t)}{x^2(t)+y^2(t)},\frac{r^2(t)y(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\Big),$$

$r(t)$ 如圖上所標示, 而下列的圖形則不屬於我們的討論範圍:

(1) $\Omega$ 邊界存在一點, 此點與原點相連之線段交 $\Omega$ 於另一點。
(2) $\Omega$ 內部 (不包含邊界) 不包含原點。
(3) $\Omega$ 不爲封閉曲線。




**定義** 3.1: $(x(t),y(t))$ 爲 $f(x,y)=0$ 的參數式, 定義

$$T_\Omega(x(t),y(t))=\Big(\frac{r^2(t)x(t)}{x^2(t)+y^2(t)},\frac{r^2(t)y(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\Big).$$

**性質** 3.2: $\Omega_1,\Omega_2$ 爲以原點爲伸縮中心的相似封閉圖形, 則 $\{T_{\Omega_1}\circ T_{\Omega_2}(f(x,y)=0)\}$ 及 $\{f(x,y)=0\}$ 相似。

**證明**:

$$T_{\Omega_1}\circ T_{\Omega_2}(x(t),y(t))=\left\{\frac{\frac{r^2(t)s^2(t)}{x^2(t)+y^2(t)}x(t)}{\left(\frac{r^2(t)}{x^2(t)+y^2(t)}x(t)\right)^2+\left(\frac{r^2(t)}{x^2(t)+y^2(t)}y(t)\right)^2},\frac{\frac{r^2(t)s^2(t)}{x^2(t)+y^2(t)}y(t)}{\left(\frac{r^2(t)}{x^2(t)+y^2(t)}x(t)\right)^2+\left(\frac{r^2(t)}{x^2(t)+y^2(t)}y(t)\right)^2}\right\}$$

$$=\left(\left(\frac{s(t)}{r(t)}\right)^2x(t),\left(\frac{s(t)}{r(t)}\right)^2y(t)\right),$$

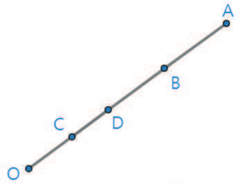
$\dfrac{s^2(t)}{r^2(t)}$ 爲定值, 同性質 2.4(1), 則反演圖形相似。 □

**性質** 3.3: $A$、$B$ 爲座標上異於原點的相異兩點, $T_\Omega(A)=C$、$T_\Omega(B)=D$, 則

$$\overline{CD}=\frac{|r^2(t_B)\overline{OA}-r^2(t_A)\overline{OB}|}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}},\text{ 或}$$

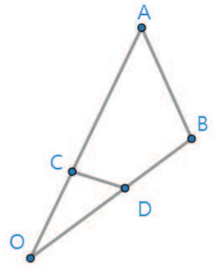
$$\overline{CD}=\frac{\sqrt{r^2(t_B)(r^2(t_B)-r^2(t_A))\overline{OA}^2+r^2(t_A)(r^2(t_A)-r^2(t_B))\overline{OB}^2+r^2(t_A)r^2(t_B)\overline{AB}^2}}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}.$$

**證明**: 若 $O,A,B$ 共線, 則 $O,A,B,C,D$共線,




$$\overline{CD}=|\overline{OD}-\overline{OC}|=\left|\frac{r^2(t_B)}{\overline{OB}}-\frac{r^2(t_A)}{\overline{OA}}\right|=\frac{|r^2(t_B)\overline{OA}-r^2(t_A)\overline{OB}|}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}.$$

若 $O,A,B$ 三點不共線 $(\angle COD=\theta)$,




$$\overline{CD}^2=\overline{OD}^2+\overline{OC}^2-2\overline{OD}\cdot\overline{OC}\cos\theta,$$

又 $\cos\theta=\dfrac{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-\overline{AB}^2}{2\overline{OA}\cdot\overline{OB}}$,

$\overline{OA}\cdot\overline{OC}=r^2(t_A)$, $\overline{OB}\cdot\overline{OD}=r^2(t_B)$

$$\Rightarrow\overline{CD}^2=\left(\frac{r^2(t_B)}{\overline{OB}}\right)^2-\left(\frac{r^2(t_A)}{\overline{OA}}\right)^2-\frac{r^2(t_A)r^2(t_B)(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-\overline{AB}^2)}{2\overline{OA}^2\overline{OB}^2}$$

$$\Rightarrow\overline{CD}^2=\frac{r^4(t_A)\overline{OB}^2+r^4(t_B)\overline{OA}^2-r^2(t_A)r^2(t_B)\overline{OA}^2-r^2(t_A)r^2(t_B)\overline{OB}^2+r^2(t_A)r^2(t_B)\overline{AB}^2}{\overline{OA}^2\overline{OB}^2}$$

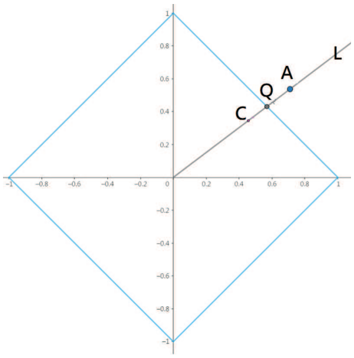
$$\Rightarrow\overline{CD}=\frac{\sqrt{r^2(t_B)(r^2(t_B)-r^2(t_A))\overline{OA}^2+r^2(t_A)(r^2(t_A)-r^2(t_B))\overline{OB}^2+r^2(t_A)r^2(t_B)\overline{AB}^2}}{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}.$$

□

**性質** 3.4: $\Omega : |x|+|y|=k$,

若 $(x(t),y(t))$ 爲第一、三象限, 則 $T_{\Omega}(x(t),y(t))=\Big(\dfrac{k^2x(t)}{(x(t)+y(t))^2},\dfrac{k^2y(t)}{(x(t)+y(t))^2}\Big)$。

若 $(x(t),y(t))$ 爲第二、四象限, 則 $T_{\Omega}(x(t),y(t))=\Big(\dfrac{k^2x(t)}{(x(t)-y(t))^2},\dfrac{k^2y(t)}{(x(t)-y(t))^2}\Big)$。




**證明**: 若 $A(x(t),y(t))$ 在第一象限, 則 $L: y=\dfrac{y(t)}{x(t)}x$,

$$\begin{cases} y=\dfrac{y(t)}{x(t)}x \\ x+y=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{kx(t)}{x(t)+y(t)}, \\ y=\dfrac{ky(t)}{x(t)+y(t)}. \end{cases}$$

$\therefore\ Q\Big(\dfrac{kx(t)}{x(t)+y(t)},\dfrac{ky(t)}{x(t)+y(t)}\Big)$,

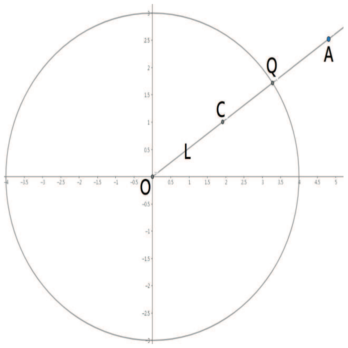
$$r^2(t)=\overline{OQ}^2=\frac{k^2(x^2(t)+y^2(t))}{(x(t)+y(t))^2} \text{ 代入 } \Big(\frac{r^2(t)x(t)}{x^2(t)+y^2(t)},\frac{r^2(t)y(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\Big)$$

$$\Rightarrow\ T_{\Omega}(x(t),y(t))=\Big(\frac{k^2x(t)}{(x(t)+y(t))^2},\frac{k^2y(t)}{(x(t)+y(t))^2}\Big).$$

同理, 若 $(x(t),y(t))$ 在第三象限, 則 $T_{\Omega}(x(t),y(t))=\Big(\dfrac{k^2x(t)}{(x(t)+y(t))^2},\dfrac{k^2y(t)}{(x(t)+y(t))^2}\Big)$.

若 $(x(t),y(t))$ 在第二、四象限, 則 $T_{\Omega}(x(t),y(t))=\Big(\dfrac{k^2x(t)}{(x(t)-y(t))^2},\dfrac{k^2y(t)}{(x(t)-y(t))^2}\Big)$。 □

**性質** 3.5: $\Omega : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 則 $T_{\Omega}(x(t),y(t))=\Bigg(\dfrac{x(t)}{\frac{x^2(t)}{a^2}+\frac{y^2(t)}{b^2}},\dfrac{y(t)}{\frac{x^2(t)}{a^2}+\frac{y^2(t)}{b^2}}\Bigg)$。




**證明**: 若 $A(x(t),y(t))$, 則 $L: y=\dfrac{y(t)}{x(t)}x$,

$$\begin{cases} y=\dfrac{y(t)}{x(t)}x \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{abx(t)}{\sqrt{b^2x^2(t)+a^2y^2(t)}}, \\ y=\dfrac{aby(t)}{\sqrt{b^2x^2(t)+a^2y^2(t)}}. \end{cases}$$

$\therefore\ Q\Big(\dfrac{abx(t)}{\sqrt{b^2x^2(t)+a^2y^2(t)}},\dfrac{aby(t)}{\sqrt{b^2x^2(t)+a^2y^2(t)}}\Big)$,

$$r^2(t)=\overline{OQ}^2=\frac{a^2b^2x^2(t)+a^2b^2y^2(t)}{b^2x^2(t)+a^2y^2(t)} \text{ 代入 } \Big(\frac{r^2(t)x(t)}{x^2(t)+y^2(t)},\frac{r^2(t)y(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\Big)$$

$$\Rightarrow\ T_\Omega(x(t),y(t))=\left(\frac{x(t)}{\frac{x^2(t)}{a^2}+\frac{y^2(t)}{b^2}},\frac{y(t)}{\frac{x^2(t)}{a^2}+\frac{y^2(t)}{b^2}}\right).\qquad\Box$$

**性質** 3.6: $\Omega:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $L:y=mx+k$, $T_\Omega(L)$ 爲 $\frac{\left(x+\frac{ma^2}{2k}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y-\frac{b^2}{2k}\right)^2}{b^2}=\frac{m^2a^2+b^2}{4k^2}$, 但 $(x,y)\neq(0,0)$。

**證明**: 若 $Q\in T_\Omega(L)$ 爲 $P\in L$ 的反演點, 同理, $P$ 亦爲 $Q$ 的反演點。

$$\text{令 } Q(x,y)\Rightarrow P\left(\frac{x}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}},\frac{y}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right),\ \text{代入}\ \ y=mx+k$$

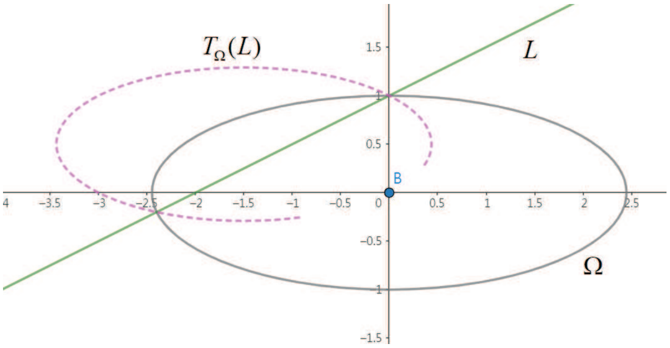
$$\Rightarrow\frac{y}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}=m\left(\frac{x}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right)+k\Rightarrow\ y=mx+k\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$\Rightarrow mx+k\frac{x^2}{a^2}+k\frac{y^2}{b^2}-y=0\ \Rightarrow\ \frac{mx}{k}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{y}{k}=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{mx}{k}+\frac{m^2a^2}{4k^2}\right)-\frac{m^2a^2}{4k^2}+\left(\frac{y^2}{b^2}-\frac{y}{k}+\frac{b^2}{4k^2}\right)-\frac{b^2}{4k^2}=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x}{a}+\frac{ma}{2k}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{b}{2k}\right)^2=\frac{m^2a^2+b^2}{4k^2}$$

$$\Rightarrow\frac{\left(x+\frac{ma^2}{2k}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y-\frac{b^2}{2k}\right)^2}{b^2}=\frac{m^2a^2+b^2}{4k^2}.\qquad\Box$$




**性質** 3.7: $\Omega:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\Gamma:\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$, 不通過原點, $T_\Omega(\Gamma)$ 爲

$$\frac{\left(x^2-\frac{p}{c}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y^2-\frac{q}{c}\right)^2}{b^2}=\frac{-a^2b^2c+b^2p^2+a^2q^2}{a^2b^2c^2},\text{其中 } c=\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}-1.$$

**證明**: 若 $Q \in T_\Omega(\Gamma)$ 爲 $P \in \Gamma$ 的反演點, 同理, $P$ 亦爲 $Q$ 的反演點。

$$令\ Q(x,y) \Rightarrow P\left(\frac{x}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}, \frac{y}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right),\ 代入\ \ \frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{x}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}-p\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{y}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}-q\right)^2}{b^2}=1.$$

$$令\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=A$$

$$\Rightarrow \Big(\frac{x-pA}{Aa}\Big)^2+\Big(\frac{y-qA}{Ab}\Big)^2=1\ \Rightarrow\ b^2(x-pA)^2+a^2(y-qA)^2=a^2b^2A^2$$

$$\Rightarrow \Big(bx-\frac{bp}{a^2}x^2-\frac{p}{b}y^2\Big)^2+\Big(ay-\frac{q}{a}x^2-\frac{aq}{b^2}y^2\Big)^2=\frac{b^2}{a^2}x^4+2x^2y^2+\frac{a^2}{b^2}y^4$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2}\Big(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}-1\Big)x^4+2\Big(\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}-1\Big)x^2y^2+\frac{a^2}{b^2}\Big(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}-1\Big)x^4$$
$$-2\frac{p}{a^2}x(b^2x^2+a^2y^2)-2\frac{q}{b^2}y(a^2y^2+b^2x^2)+(b^2x^2+a^2y^2)=0.$$

$$令\ \frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}-1$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2}cx^4+2cx^2y^2+\frac{a^2}{b^2}cx^4-2\frac{p}{a^2}x(b^2x^2+a^2y^2)-2\frac{q}{b^2}y(b^2x^2+a^2y^2)+(b^2x^2+a^2y^2)=0$$

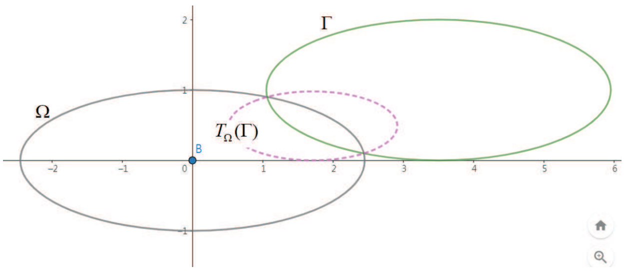
$$\Rightarrow \frac{c}{a^2b^2}(b^2x^2+a^2y^2)^2-2\frac{p}{a^2}x(b^2x^2+a^2y^2)-2\frac{q}{b^2}y(b^2x^2+a^2y^2)+(b^2x^2+a^2y^2)=0$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a^2b^2}(b^2x^2+a^2y^2)-2\frac{p}{a^2}x-2\frac{q}{b^2}y+1=0$$

$$\Rightarrow cb^2\Big(x^2-2\frac{p}{c}x+\frac{p^2}{c^2}\Big)+ca^2\Big(y^2-2\frac{q}{c}y+\frac{q^2}{c^2}\Big)=-a^2b^2+cb^2\frac{p^2}{c^2}+ca^2\frac{q^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow cb^2\Big(x-\frac{p}{c}\Big)^2+ca^2\Big(x-\frac{q}{c}\Big)^2=\frac{-a^2b^2c+b^2p^2+a^2q^2}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(x^2-\frac{p}{c}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y^2-\frac{q}{c}\right)^2}{b^2}=\frac{-a^2b^2c+b^2p^2+a^2q^2}{a^2b^2c^2}. \qquad \square$$



## 結論

在此篇研究中, 由一開始對反演, 確定了一些基礎規則; 接著再對半徑不爲 1 的圓反演, 發現如果一個函數同時對不同半徑的圓反演, 其圖形會相似, 且如果一函數圖形經兩次反演變換後, 就相當於對原有函數圖形進行伸縮變換; 而接下來我們又想了解封閉圖形的反演變換, 就特別針對了較特殊的圖形 (菱形、橢圓形) 做變換研究。

感謝我們導師盧俊豪老師給予指導, 在我們有限的知識下給予我們可以理解的知識, 並引導我們如何進行數學研究, 令我們獲益良多。

## 參考資料與其他

1. I. Ya. Bakelman 原著; 王敬庚譯。反演。九章出版社, 1998。
2. 嚴鎮軍。反射與反演。九章出版社, 2002。
3. 師大數學系趙文敏教授。幾何學概論。九章出版社。ISBN:957-603-012-9。

—作者王宣惠, 凃嘉芸, 蕭羽涵投稿時爲彰化女中二年級學生, 指導老師盧俊豪老師—

## 勘誤表

第 48 卷第1期 (189號), 62頁, Line -6

$$= \frac{1}{2} \sum_{i、j\in\{1,2,\ldots,n-1\}\wedge i<j} (-1)^{i-j+1} a_i a_j \sin\Big(\sum_{k=1}^{j-1} \theta_k\Big).$$

應爲：

$$= \frac{1}{2} \sum_{i、j\in\{1,2,\ldots,n-1\}\wedge i<j} (-1)^{i-j+1} a_i a_j \sin\Big(\sum_{k=i}^{j-1} \theta_k\Big).$$

第 48 卷第1期 (189號), 101頁, Line -3

將結論 (i) 中的有向線段視過向量的投影,

應爲：

將結論 (i) 中的有向線段視爲向量的投影,

第 43 卷第2期 (170號), 34頁, Line 6, 參考資料第5項

[5] Hardy 著, *Inequility* 之 Muirhead 定理。

應爲：

[5] Hardy 著, *Inequality* 之 Muirhead 定理。